

Leitfaden – Wie löse ich ein Problem?

1945 veröffentlichte George PÓLYA die bekannte *Schule des Denkens*. Mit Hilfe dieses „Leitfadens“ können Schüler an das systematische Problemlösen herangeführt werden:

Wie löse ich ein Problem? (nach PÓLYAS, vereinfachte Formulierung)

Das Problem verstehen

Was wird gesucht?

Welche Angaben sind vorgegeben? (Hat man wirklich alle verwendet? Sind bestimmte Angaben wesentlicher als andere?)

Welche Bedingungen müssen erfüllt werden?

Fertige eine Zeichnung an. Wähle passende Bezeichnungen.

Einen Lösungsplan aufstellen

Ist ein ähnliches Problem bereits bekannt?

Vielleicht in einer etwas anderen Form?

Gibt es ein bekanntes Problem, das dieselben Unbekannten enthält?

Kann man dessen Ergebnis verwenden? Kann man dessen Methode verwenden?

Kann man das zu lösende Problem zunächst vereinfachen/ verändern, d.h. ...

... für einen Spezialfall lösen?

... zunächst bestimmte zusätzliche Annahmen machen?

... einen Teil der Bedingungen erst einmal weglassen?

... zusätzliche Größen (z. B. Hilfslinien) einführen?

... für die gegebenen Größen bestimmte Werte wählen?

... aufteilen in Teilprobleme, die man unabhängig lösen kann?

Durchführung des Lösungsplans

So weit wie möglich die geplanten Schritte durchführen

Kontrollieren, ob die Schritte jeweils richtig sind

Hat man bereits das gewünschte Ergebnis erreicht?

Hat man dazu das Problem verändert?

Kann man die Schritte auch ohne die zusätzliche(n) Annahmen(n) machen?

Wenn nicht, woran liegt das? Lässt sich dieses Problem beheben?

Ergeben die Lösungen der Teilprobleme die Gesamtlösung?

Rückschau – Kontrolle

Sind die einzelnen Schritte alle korrekt?

Ist die Lösung sinnvoll?

Kontrolliere die Größenordnung durch Überschlagsrechnung.

Kontrolliere die Einheiten.

Untersuche die Symmetrie (Was passiert beim Austausch von Größen?)

Gehen alle benötigten Größen ein?

Wie sieht die Lösung für Spezialfälle aus?

Sind die Grenzfälle vernünftig?

Mit Schülern umsetzbare, angemessene Einstiegsprobleme für das Problemlösen, an denen die Vorschläge Pólyas sukzessive erarbeitet und interpretiert werden können, sollten

1. vom jeweils aktuellen Schulstoff relativ unabhängig sein
2. die Schüler dazu motivieren, eigene Methoden zu erfinden
3. verschiedene Lösungswege besitzen

4. die Verwendung heuristischer Strategien nahelegen
5. leicht verständlich und mit Alltagswissen interpretierbar sein (zitiert nach Leuders [2001], S. 212/ 213)

Welche „Probleme“ nicht geeignet sind, sind „trickreiche Lösungen zu trickreichen Aufgaben“ (...). Solche Aufgabentypen sind vor allem deswegen nicht zu rechtfertigen, weil sie unverbunden und unreflektiert bleiben. Erst dadurch, dass ein Problem über sich hinausweist, indem es zu tragfähigen mathematischen Ideen hinführt, wird es unterrichtlich produktiv“ (Leuders [2003], S. 120). Demzufolge sind viele „Knobelaufgaben“ zwar geeignet um andere allgemeine Kompetenzen (wie etwa Kommunizieren, Kooperieren, Durchhaltevermögen,...) zu fördern – die Problemlösekompetenz „an sich“ berühren sie jedoch nur am Rande.

Die oben angeführte Aufgabenstellung („Zerlege die Zahl 31 in zwei Zahlen“) belegt dies beispielhaft: Sie ist – bei Veränderung der Zahlgrößen und gesichertem Aufgabenverständnis – in nahezu jeder Klassenstufe durchführbar und führt (ab Aufgabenteil 2) bereits auf weiterreichende Lösungsstrategien wie Vor- und Rückwärtsarbeiten oder allgemeine zahlentheoretische bzw. algebraische Überlegungen (z. B. die 3. Aufgabe: $5a + 2b = 31$).